Úloha 1

Radka Ďurčová

Zadanie: Rozhodnite a dokážte, či je jazyk $L = \{a^n b^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$ bezkontextový.

Riešenie: Predpokladajme, že je jazyk L bezkontextový. Potom musí spĺňať pumpovaciu lemu pre bezkontextové jazyky.
Teda pre L platí, že $(\exists p, q \in \mathbb{N})$ $(\forall w; p \geq 1, w \in L, |w| \geq p)$ $(\exists x, u, y, v, z \in \{a, b\}^*)$

(1) $w = xuyvz$

(2) $|uyv| \leq q$

(3) $|uv| \geq 1$

(4) $\forall i \in \mathbb{N}; xu^i yv^i z \in L$

Definujme $r = p + q + 150$ a uvažujme slovo $w = a^r b^{r^2} \in L$. Podľa pumpovacej lemy existujú slová x, u, y, v, z také, že platia podmienky (1)-(4).
Keďže slová v jazyku L sú tvaru $a...ab...b$ tak musí platiť, že slovo u musí obsahovať iba znaky a alebo iba znaky b, rovnako aj slovo v. Inak by sa pri pumpovaní zjavne narušilo správne poradie a, b.
Máme teda nasledujúce spôsoby rozdelenia:

a) slová u, v obsahujú iba znaky a
Teda $w = xuyvz = a^r b^{r^2} = a^{l_x} a^{l_u} a^{l_y} a^{l_v} a^{r-l_x-l_u-l_y-l_v} b^{r^2}$ kde $x = a^{l_x}, u = a^{l_u}, y = a^{l_y}, v = a^{l_v}, z = a^{r-l_x-l_u-l_y-l_v} b^{r^2}$ pre nejaké $l_x, l_u, l_y, l_v \in \mathbb{N}$.
Nech $i = 0$ a $w' = xu^0 yv^0 z$. Platí $w' = a^{l_x} a^0 a^{l_y} a^0 a^{r-l_x-l_u-l_y-l_v} b^{r^2} = a^{r-l_u-l_v} b^{r^2}$.
Ak w' patrí do L tak platí $(r - l_u - l_v)^2 = r^2$.
Potom $r - l_u - l_v = r$ a $l_u + l_v = 0$ čo je spor s (3), teda $w' \notin L$.

b) slová u, v obsahujú iba znaky b
$w = xuyvz = a^r b^{l_x} b^{l_u} b^{l_y} b^{l_v} b^{r^2-l_x-l_u-l_y-l_v}$, kde $x = a^r b^{l_x}, u = b^{l_u}, y = b^{l_y}, v = b^{l_v}, z = b^{r^2-l_x-l_u-l_y-l_v}$ pre nejaké $l_x, l_u, l_y, l_v \in \mathbb{N}$.
Nech $i = 0$ a $w' = xu^0 yv^0 z$. Platí $w' = a^r b^{l_x} b^0 b^{l_y} b^0 b^{r^2-l_x-l_u-l_y-l_v} = a^r b^{r^2-l_u-l_v}$.
Ak w' patrí do L tak platí $r^2 = (r^2 - l_u - l_v)$.
Potom $l_u + l_v = 0$ čo je spor s (3), teda $w' \notin L$.

c) slovo u obsahuje iba znaky a, slovo v obsahuje iba znaky b
$w = xuyvz = a^{l_x} a^{l_u} a^{r-l_x-l_u} b^{r^2-l_v-l_z} b^{l_v} b^{l_z}$ kde $x = a^{l_x}, u = a^{l_u}, y = a^{r-l_x-l_u} b^{r^2-l_v-l_z}, v = b^{l_v}, z = b^{l_z}$ pre nejaké $l_x, l_u, l_v, l_z \in \mathbb{N}$.

Nech $i = 0$ a $w' = xu^0 yv^0 z$.
Platí $w' = a^{l_x} a^0 a^{r-l_x-l_u} b^{r^2-l_v-l_z} b^0 b^{l_z} = a^{r-l_u} b^{r^2-l_v}$.
Potom $(r - l_u)^2 = r^2 - l_v$ (0)

Nech $i = 2$ a $w' = xu^2 yv^2 z$.
Platí $w' = a^{l_x} a^{2l_u} a^{r-l_x-l_u} b^{r^2-l_v-l_z} b^{2l_v} b^{l_z} = a^{r+l_u} b^{r^2+l_v}$.
Potom $(r + l_u)^2 = r^2 + l_v$ (2)

Z (0) ${l_u}^2 - 2rl_u + l_v = 0$
Z (2) $l_v = {l_u}^2 + 2rl_u$.
Dosadením do (0) ${l_u}^2 - 2rl_u + {l_u}^2 + 2rl_u = 0$
Teda $2{l_u}^2 = 0$ a $l_u = |u| = 0$. Potom ale aj $l_v = |v| = 0$, čo je spor s (3), teda $w' \notin L$.

Ukázali sme, že pre ľubovoľné p a q a pre slovo w neexistuje rozdelenie také, že sú splnené podmienky (1)-(4) z pumpovacej lemy, čo je spor. Jazyk L teda nie je bezkontextový.